

No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without written permission from the IB.

Additionally, the license tied with this product prohibits commercial use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, is not permitted and is subject to the IB's prior written consent via a license. More information on how to request a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite de l'IB.

De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation commerciale de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, n'est pas autorisée et est soumise au consentement écrit préalable de l'IB par l'intermédiaire d'une licence. Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour demander une licence, rendez-vous à l'adresse suivante : <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin que medie la autorización escrita del IB.

Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso con fines comerciales de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales— no está permitido y estará sujeto al otorgamiento previo de una licencia escrita por parte del IB. En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Mathématiques
Niveau supérieur
Épreuve 3 – analyse

Mardi 10 novembre 2020 (après-midi)

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[50 points]**.

Veillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fautive, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 7]

Utilisez la règle de L'Hôpital pour trouver

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x^2 - 1) - 1}{e^{x-1} - x}.$$

2. [Note maximale : 10]

Considérez la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-3x)^n}{n}$.

- (a) Montrez que la série converge pour $\frac{4}{3} < x < 2$. [5]
- (b) Trouvez l'intervalle de convergence de la série. [5]

3. [Note maximale : 18]

La courbe $y = f(x)$ a une fonction qui donne la pente (en un point)

$$\frac{dy}{dx} = x - y.$$

La courbe passe par le point (1 ; 1).

- (a) (i) Sur le même système d'axes, esquissez et légendez les isoclines pour $\frac{dy}{dx} = -1, 0$ et 1 , et indiquez clairement la valeur de chaque ordonnée à l'origine. [6]
- (ii) À partir de là ou par toute autre méthode, expliquez pourquoi le point (1 ; 1) est un minimum relatif.
- (b) Trouvez la solution de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = x - y$, qui passe par le point (1 ; 1).
Donnez votre réponse sous la forme $y = f(x)$. [8]
- (c) (i) Expliquez pourquoi la représentation graphique de $y = f(x)$ ne coupe pas l'isocline $\frac{dy}{dx} = 1$. [4]
- (ii) Esquissez la représentation graphique de $y = f(x)$ sur le même système d'axes que la partie (a)(i).

4. [Note maximale : 15]

La fonction f est définie par $f(x) = \ln(1 + x^2)$, où $-1 < x < 1$.

(a) (i) Utilisez la série de Maclaurin pour $\ln(1 + x)$ pour écrire les trois premiers termes non nuls de la série de Maclaurin pour $f(x)$.

(ii) À partir de là, trouvez les trois premiers termes non nuls de la série de Maclaurin pour $\frac{x}{1+x^2}$. [6]

(b) Utilisez votre réponse de la partie (a)(i) pour écrire une estimation de $f(0,4)$. [1]

La septième dérivée de f est donnée par $f^{(7)}(x) = \frac{1440x(x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 7)}{(1+x^2)^7}$.

(c) (i) Utilisez le reste de Lagrange pour trouver une borne supérieure pour la valeur absolue de l'erreur lorsqu'on calcule $f(0,4)$, en utilisant les trois premiers termes non nuls de la série de Maclaurin pour $f(x)$.

(ii) En faisant référence au reste de Lagrange, expliquez si votre réponse à la partie (b) surestime ou sous-estime $f(0,4)$. [8]